论密封拍卖与真实出价

宋学辉

Peking University ShenZhen Graduate School

hustsxh@gmail.com

April 10, 2013

1 何为首价密封拍卖与次价密封拍卖

所谓首价密封拍卖，是指买家提交密封式并且最高者以其价格获得商品的一种拍卖。

所谓次价密封拍卖，是指者提交密封式并且价最高者获得商品，但价格不等于他的价，而是仅次于其的第二高价。

2 哪种拍卖方式鼓励真实出价?

2.1 定义说明

为了方便说明，定义如下变量：

- v_0：竞拍者对商品的估价
- v：竞拍者的出价
- v'：竞拍者买下商品的价格
- $p(x)$：除自己外，其他竞拍者出价的最大值为x的概率
- I：收益

- $E(v)$：出价为v时收益的期望

并作如下合理假设：

1. 竞拍者买下商品的收益为$v_0 - v'$
2. 竞拍者没有拍到商品时，收益为0
3. 竞拍者总是希望自己的收益期望最大

2.2 首价密封拍卖

根据首价密封拍卖的规则可知，首价密封拍卖的收益如下：

$$I_1 = v_0 - v_1' = \begin{cases} v_0 - v & \text{如果} x < v \\ 0 & \text{如果} x > v \end{cases}$$

那么首价拍卖收益的期望为

$$\begin{aligned} E_1(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} I_1 \times p(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{v} (v_0 - v) \times p(x)dx \\ &= (v_0 - v) \times \int_{-\infty}^{v} p(x)dx \end{aligned}$$

由于$\int_{-\infty}^{v} p(x)dx$是一个正数，要使$E_1(v)$最大，就必须$v < v_0$。由此可以看出，**首价密封拍卖并不会鼓励竞拍者真实出价。竞拍者为了获得最大的收益期望，出价往往略低于估价。**

2.3 次价密封拍卖

根据次价密封拍卖的规则可知，次价密封拍卖的收益如下：

$$I_2 = v_0 - v_2' = \begin{cases} v_0 - x & \text{如果} x < v \\ 0 & \text{如果} x > v \end{cases}$$

那么次价拍卖收益的期望为

$$E_2(v) = \int_{-\infty}^{\infty} I_2 \times p(x)dx = \int_{-\infty}^{v} (v_0 - x)p(x)dx$$

由于$p(x)$始终为正，当$x < v_0$时，$(v_0 - x)p(x)$为正，$x > v_0$时，$(v_0 - x)p(x)$为负。即当且仅当$v = v_0$时，$E_2(v)$最大。由此可以看出，**参与次价密封拍卖的竞拍者想要获得最大收益期望，就必须使出价等于估价。也就是说，次价密封拍卖鼓励竞拍者真实出价。**

3 具体收益?

3.1 合理假设

假设除自己外，还有n个竞拍者，并且这些竞拍者的出价符合正态分布（这样的假设直观看来还是比较合理的）。

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

正态分布的累积函数$F(x;\mu,\sigma)$为

$$F(x;\mu,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(t;\mu,\sigma)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2})dt$$

方便起见，将$f(x;\mu,\sigma)$简写成$f(x)$，$F(x;\mu,\sigma)$简写成$F(x)$。

3.2 假设下的$p(x)$

根据$p(x)$的定义

1. 其中某一个人出价最高，为x，概率为$f(x)dx$
2. 其他人出价均小于等于x，概率为$F(x)^{n-1}$

即

$$p(x)dx = f(x)dx \times F(x)^{n-1} = f(x)F(x)^{n-1}dx$$

3.3 首价密封拍卖的收益

$$E_1(v) = (v_0 - v) \times \int_{-\infty}^{v} p(x)dx = (v_0 - v) \int_{-\infty}^{v} f(x)F(x)^{n-1}dx$$

为了求$E_1(v)$的最大值，对其进行求导。即

$$E_1'(v) = -F(v)^n + (v_0 - v)f(v)F(v)^{n-1}$$

令$E_1'(v) = 0$，求解$v =$**实在解不出呀！！！！**

算出v后带入到$E_1(v)$的公式中，即可求得$E_1(v)_{max}$

3.4 次价密封拍卖的收益

$$E_2(v) = \int_{-\infty}^{v} (v_0 - x) \times p(x)dx = \int_{-\infty}^{v} (v_0 - x)f(x)F(x)^{n-1}dx$$

由上面推到可知，当$v = v_0$时，$E_2(v)$取到最大值，即

$$E_2(v)_{max} = \int_{-\infty}^{v_0} (v_0 - x)f(x)F(x)^{n-1}dx$$

这个也算不出来！！！！